

取值范围为  $[0, 4]$ .

(2)  $\because x^2 - ax - a + 3 = 0$  有两个不相等的实数根分别为  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 x_2 > 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a^2 - 4(-a+3) > 0, \\ -a+3 > 0, \end{cases}$$

解得  $a < -6$  或  $2 < a < 3$ , 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -6) \cup (2, 3)$ .

### 985 冲刺专题三 与一元二次不等式有关的恒成立与有解问题

**1. D** 【解析】当  $a = 0$  时, 不等式化为  $2 > 0$ , 恒成立;

当  $a \neq 0$  时, 要满足题意, 只需

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = a^2 - 8a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < 8.$$

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $[0, 8)$ . 故 D 正确.

**2. B** 【解析】当  $x \in [-3, -1]$  时,  $x^2 + ax + 4 \geq 0$  恒成立, 即  $a \leq$

$$-\left(x + \frac{4}{x}\right) \text{ 恒成立, 因此只需 } a \leq$$

$$\left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min}. \text{ 令 } y = -\left(x + \frac{4}{x}\right),$$

$x \in [-3, -1]$ , 则  $-x \in [1, 3]$ , 因为

$$y = (-x) + \left(-\frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{(-x)\left(-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$4, \text{ 当且仅当 } -x = -\frac{4}{x}, \text{ 即 } x = -2 \text{ 时}$$

取等号, 所以当  $x \in [-3, -1]$  时,

$$\left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min} = 4, \text{ 所以 } a \leq 4, \text{ 即实}$$

数  $a$  的最大值为 4.

**3. D** 【解析】因为  $x > 0, y > 0$ , 且  $\frac{1}{x+2} +$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } x+2+y = \frac{3}{2}(x+2+y) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{y}{x+2} + \frac{x+2}{y}\right) \geq$$

$$\frac{3}{2} \cdot \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x+2} \cdot \frac{x+2}{y}}\right) = 6, \text{ 当且仅当}$$

当  $x+2 = y$ , 即  $y = 3, x = 1$  时取等

号, 所以  $x+2+y$  有最小值 6. 若  $x+$

$2+y > m^2 + 5m$  恒成立, 即  $6 > m^2 + 5m$

恒成立, 解得  $-6 < m < 1$ . 故 D 正确.

**4. BD** 【解析】关于  $x$  的不等式  $x^2 -$

$2ax + a > 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立, 可得

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 1 \times a < 0, \text{ 解得 } 0 < a <$$

1, 而  $(0, 1) \subsetneq (0, 1], (0, 1)$

$\subsetneq [0, +\infty)$ . 故 BD 正确.

**5. ABC** 【解析】不等式  $x^2 - 4x - a -$

$1 \geq 0$  在  $x \in [1, 4]$  上有解, 即  $a \leq$

$(x^2 - 4x - 1)_{\max}$  在  $[1, 4]$  上恒成立,

设  $y = x^2 - 4x - 1, x \in [1, 4]$ , 则  $y =$

$(x-2)^2 - 5$ , 而当  $x = 1$  时,  $y = -4$ , 当

$x = 4$  时,  $y = -1$ , 故  $y$  在  $[1, 4]$  上的

最大值为  $-1$ , 故  $a \leq -1$ , 所以  $a$  的

取值可以是  $-6, -5, -1$ . 故 ABC

正确.

**6.  $[-1, +\infty)$**  【解析】依题意可得,

$(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 \geq 0$  对于

$x \in \mathbf{R}$  恒成立, 当  $m+1 = 0$ , 即  $m =$

$-1$  时,  $(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 =$

$1 \geq 0$ , 显然成立;

当  $m+1 \neq 0$  时, 由题意得

$$\begin{cases} m+1 > 0, \\ \Delta = (m+1)^2 - 4(m+1)(m+2) \leq 0, \end{cases}$$

解得  $m > -1$ . 综上, 实数  $m$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ .

**7.  $(-\infty, \sqrt{3})$**  【解析】 $mx^2 - 6x + 3m <$

$$0 \text{ 变形为 } m < \frac{6x}{x^2+3} = \frac{6}{x+\frac{3}{x}}, \text{ 故 } m <$$

$$\left(\frac{6}{x+\frac{3}{x}}\right)_{\max} \text{ 在 } (0, 2] \text{ 上成立, 因为}$$

$$x \in (0, 2], \text{ 所以 } x + \frac{3}{x} \geq$$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } \frac{6}{x+\frac{3}{x}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } x = \frac{3}{x}, \text{ 即 } x = \sqrt{3} \text{ 时,}$$

等号成立, 所以  $m < \sqrt{3}$ .

**8. 【解】**(1)  $\because y = ax^2 + bx + c$  的图象的

对称轴为直线  $x = 1$ , 最小值为  $-1$ ,

且当  $x = 0$  时,  $y = 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1, \\ c = 0, \\ \frac{4ac-b^2}{4a} = -1, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

$$\therefore y = x^2 - 2x.$$

(2)  $\because y > m - 2x$ , 即  $x^2 > m$  在  $[0,$

$3]$  上恒成立, 又  $\because$  当  $x \in [0, 3]$  时,

$x^2$  有最小值  $0$ ,  $\therefore m < 0$ ,  $\therefore$  实数  $m$

的取值范围为  $(-\infty, 0)$ .

**9. 【解】**(1) 当  $m = 0$  时, 显然  $-6 < 0$ ,

满足题意;

当  $m < 0$  时, 因为  $x^2 + x + 1 =$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以 } mx^2 + mx + m -$$

$6 = m(x^2 + x + 1) - 6 < 0$  恒成立, 满足

题意;

当  $m > 0$  时, 则需  $\Delta = m^2 - 4m(m -$

$6) > 0$ , 解得  $0 < m < 8$ .

综上, 实数  $m$  的取值范围是

$(-\infty, 8)$ .

(2) 由题可知, 当  $x \in [-2, 1]$  时,

$m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$  恒成立. 因为

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以}$$

$m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$  等价于  $m <$

$$\frac{2}{x^2 - x + 1}. \text{ 因为 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ 在区}$$

间  $[-2, 1]$  上的最大值为 7, 所以

$$y = \frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \text{ 在区间}$$

$[-2, 1]$  上的最小值为  $\frac{2}{7}$ , 所以只

需  $m < \frac{2}{7}$  即可, 所以实数  $m$  的取值

范围是  $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$ .